CONCOURS D'ENTRÉE
1979

OPTION : PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Ce sujet comporte 3 pages de texte

Dans tout le problème a et c sont deux constantes réelles, données, c n'appartenant pas à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
Soit E l'équation différentielle : $xy'' + (c - x)y' - ay = 0$
On appellera solution de E définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, toute application deux fois dérivable $y(x)$ de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$xy''(x) + (c - x)y'(x) - ay(x) = 0$$

pour tout x de I.

On admettra que l'ensemble des solutions de E définies sur $]0, +\infty[$ (respectivement sur $]-\infty, 0[$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

I

1°) Montrer qu'il existe une solution $y_1(x)$ de E, définie sur toute la droite réelle, telle que : $y_1(0) = 1$, qui soit la somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Expliciter en fonction de a, c, n, le coefficient a_n de cette série.

Dans quels cas cette solution est-elle un polynome ?

2°) Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, on pose $y(x) = |x|^{1-c} z(x)$

a. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0, montrer que $y(x)$ est solution de E définie sur I si et seulement si $z(x)$ est solution sur I de l'équation E' : $xz'' + (c' - x)z' - a'z = 0$, a' et c' étant deux constantes réelles que l'on déterminera en fonction de a et c.

b. Montrer qu'il existe une solution de E définie sur $]0, +\infty[$ de la forme : $w_1(x) = x^{1-c} z(x)$ où $z(x)$ désigne une solution non nulle de E' sur $\mathbb{R}$

Montrer de même qu'il existe une solution de E définie sur $]-\infty, 0[$ de la forme : $w_2(x) = (-x)^{1-c} z(x)$.

c. Préciser à l'aide de ces résultats l'espace vectoriel des solutions de E sur $]0, +\infty[$ (respectivement sur $]-\infty, 0[$).

II

1°) Soit $g(t)$ une application du segment $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continue, et soit $f(x)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^1 e^{xt} g(t)\, dt .$$

Soit $(x_0, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, montrer qu'il existe un réel K indépendant de h tel que :

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \int_0^1 e^{x_0 t} \cdot t\, g(t)\, dt \right| \leqslant K |h| e^{|h|}$$

En déduire que $f(x)$ est une application indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée d'ordre n, pour tout entier n positif.

2°) a. Pour quelles valeurs des nombres réels p et q peut-on définir sur tout $\mathbb{R}$, la fonction numérique $I_{p,q}(x) = \int_0^1 e^{xt} t^{p-1} (1 - t)^{q-1}\, dt$?

b. On pose, lorsque l'intégrale a un sens $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} (1 - t)^{q-1}\, dt$.

- Calculer $B(p + 1, q)$ en fonction de p, q, $B(p, q)$.
- En déduire l'expression de $B(p + n, q)$ en fonction de n, p, q, $B(p, q)$ pour tout entier positif n.
- Exprimer, lorsque p et q sont des entiers strictement positifs, $B(p, q)$ en fonction de p et de q.

c. Pour quelles valeurs des réels p et q l'application $g(t)$ définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = t^{p-1}(1 - t)^{q-1}$ est-elle continue ? continument dérivable ?

d. Calculer, lorsqu'elle est définie, la dérivée $I'_{p,q}(0)$ en fonction de $B(p,q)$.

3°) On souhaite déterminer une solution de E sous forme intégrale.

a. On pose pour tout x réel : $y_2(x) = \int_0^1 e^{xt} h(t)\, dt$, $h(t)$ désignant une fonction numérique continument dérivable sur le segment $[0, 1]$.

Grâce à une intégration par parties, montrer que :

$$xy''_2(x) + (c - x)y'_2(x) - ay_2(x) = \int_0^1 e^{xt} \left[(1 - a + (c - 2)t)h(t) - t(t - 1)h'(t) \right] dt .$$

Montrer que pour un choix convenable des réels a et c on peut déterminer la fonction $h(t)$ pour que $y_2(x)$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de E.

.../...

b. Montrer que pour un choix convenable des réels a et c on peut définir une solution $v_1(x)$ de E sur $]0, +\infty[$ de la forme :

$$v_1(x) = x^{1-c} \int_0^1 e^{xt}\, k(t)\, dt ,$$

et une solution $v_2(x)$ de E sur $]-\infty, 0[$ de la forme :

$$v_2(x) = (-x)^{1-c} \int_0^1 e^{xt}\, k(t)\, dt ,$$

la fonction $k(t)$ étant à expliciter.

c. Montrer que $y_2(x) = \lambda\, y_1(x)$ pour tout réel x, λ étant une constante réelle à déterminer.

Etablir une relation analogue liant $v_1(x)$ et $w_1(x)$ sur $]0, +\infty[$

(respectivement $v_2(x)$ et $w_2(x)$ sur $]-\infty, 0[$)

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail